Автоматика и телемеханика, № 6, 2024

© 2024 г. **Р.П. АГАЕВ, д-р физ.-мат. наук (agaraf3@gmail.com),**
Д.К. ХОМУТОВ (homutov_dk@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О ГРАНИЧНОМ ЗНАЧЕНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И АСИМПТОТИКЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОТОКОЛА КОНСЕНСУСА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Изучается задача согласования характеристик в многоагентной системе с информационными влияниями. В частности, изучена модель многоагентной системы, в которой информация между агентами передается с постоянным для всех агентов запаздыванием. С помощью критерия Найквиста, примененного Цыпкиным для систем с запаздыванием, получена формула для граничного значения запаздывания, входящего как параметр в систему дифференциальных уравнений с несимметричной постоянной лапласовской матрицей. Найдено условие, при котором устойчивость системы не зависит от запаздывания. Полученные результаты обобщают некоторые ранее полученные результаты и могут быть применены при анализе согласования характеристик в многоагентной системе со сложным протоколом.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, собственный проектор, лапласовская матрица, орграф связей, управление с запаздыванием, метод Цыпкина.

DOI: 10.31857/S0005231024060068, **EDN:** XXBDLA

1. Введение

Начиная с 40-х годов прошлого века появилось множество публикаций и классических результатов по устойчивости квазиполиномов, функционально-дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом и т.п. (см., например, [1–6]). Системы с запаздыванием – также хорошо изученный раздел теории автоматических систем (см., например, [7–13]).

Проблема запаздывания в многоагентных системах с информационными влияниями изучена рядом авторов в работах по консенсусу (см. например, [14–20]). Во второй части книги [14] приведен обзор некоторых публикаций по запаздыванию в дискретных системах, синхронизации в сетях с запаздывающими связями, приближенному консенсусу в сетях с задержками в измерениях и др.

В данной статье исследуется протокол согласования характеристик в многоагентных системах (МАС) с временной задержкой. Предполагается, что агенты получают данные о состояниях своих соседей с запаздыванием, а также по той же топологии усредняют свои данные без запаздывания для согласования характеристик. Для такого протокола решается задача зависимости граничного значения запаздывания от спектра лапласовской матрицы. Поставленная задача актуальна не только для моделей многоагентных систем с лапласовской матрицей, но и для систем с произвольной квадратной матрицей. Если для симметричной матрицы решение данной задачи сводится к решению скалярного уравнения с действительными коэффициентами, которая достаточно хорошо изучена, то для произвольной квадратной матрицы аналогичное скалярное уравнение с комплексными коэффициентами не было исследовано. Исследование также представляет теоретический интерес: полученные результаты могут быть использованы для анализа систем с множественными входом и выходом (MIMO-системы).[1]

МАС с информационными воздействиями занимают центральное место среди всех МАС, встречающихся в различных предметных областях (см., например, [21–26]). Особенность таких систем состоит в том, что система с информационными воздействиями, как обычно, представляется в виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют агентам, а дуги – воздействиям агентов друг на друга. При применении непрерывного протокола строится матрица Лапласа, и система описывается системой дифференциальных уравнений с построенной матрицей Лапласа.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведены основные понятия и определения, использованные в работе, изложены некоторые известные результаты по граничным значениям временной задержки и приведены вспомогательные и ранее доказанные утверждения. В разделе 3 приведены главные результаты настоящей работы и их следствия.

2. Необходимые понятия и вспомогательные результаты

Рассмотрим многоагентную систему с множеством агентов $V = \{1, \ldots, n\}$. Такую систему можно представить в виде орграфа связей $\Gamma = (V, E)$, где $E \subset V \times V$ – множество дуг. В этих обозначениях множество агентов – это множество вершин орграфа Γ. Предполагается, что если агент j влияет на агента i с весом a_{ij}, то существует дуга из вершины j в вершину i с весом a_{ij}. Матрицу $A = (a_{ij})$ назовем коммуникационной матрицей (или матрицей влияний).

Определение 1. L – матрица Лапласа, соответствующая орграфу Γ, определяется следующим образом: для $i \neq j$ $l_{ij} = -a_{ij}$, $l_{ii} = \sum_{k \neq i} a_{ik}$.

По определению матрицы Лапласа $L\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$, где $\mathbf{1}_n$ и $\mathbf{0}_n$ – векторы размерности n, состоящие из единиц и нулей соответственно. Это означает, что 0 является собственным значением L. Легко установить (например, с помощью теоремы Гершгорина), что каждое ненулевое собственное значение L имеет положительную действительную часть.

[1] Некоторые изложенные в настоящей статье результаты без доказательств и вкратце представлены в работе конференции RusAutoCon-2023.

Определение 2. Индекс ν квадратной матрицы A – это порядок наибольшего жорданова блока с нулевой диагональю в жордановой форме матрицы A или минимальное число ν, удовлетворяющее равенству $\operatorname{rank}(A^{\nu}) = \operatorname{rank}(A^{\nu+1})$.

Определение 3. Собственным проектором (см, например, [27]) квадратной матрицы A называют идемпотентную матрицу $A^{\vdash}$, у которой $\mathcal{R}(A^{\vdash}) = \mathcal{N}(A^{\nu})$ и $\mathcal{N}(A^{\vdash}) = \mathcal{R}(A^{\nu})$, где ν – индекс матрицы A, $\mathcal{R}(X) = \{y : y = Xx\}$ – область значений матрицы X, $\mathcal{N}(X) = \{x : Xx = 0\}$ – нуль-пространство (ядро) матрицы X.

Определение 4. Будем говорить, что МАС с запаздыванием и заданным протоколом устойчива, если существует конечный предел вектора характеристик агентов.

Определение 5. Будем говорить, что МАС с запаздыванием и заданным протоколом сходится, если консенсус достигается для любого вектора начальных значений или если предел вектора характеристик агентов можно представить в виде $c\mathbf{1}_n$, где $c \in R^1$ – значение консенсуса.

В данной статье рассмотрим протокол консенсуса в многоагентных системах в виде

$$\dot{x}(t) = -aLx(t) - bLx(t-\tau), \tag{1}$$

где $a \geqslant 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

Протокол (1) является частным случаем системы с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + A_2x(t-\tau), \tag{2}$$

для которой часто изучаются две задачи: 1) при каком условии устойчивость системы не зависит от запаздывания; 2) если устойчивость зависит от запаздывания, то найти граничное значение запаздывания.

Пусть I – единичная матрица. Характеристическая функция системы (2) определяется следующим образом:

$$f(s) = \det(sI - A_1 - A_2e^{-s\tau}). \tag{3}$$

Известно, что функция $f(s)$ целая (аналитическая во всей комплексной плоскости) и все ее нули на комплексной плоскости расположены следующим образом: существует действительное число η такое, что нет нулей s, для которых $\operatorname{Re}(s) > \eta$, и только для конечного числа нулей выполняется $0 \leqslant \operatorname{Re}(s) \leqslant \eta$. Система (2) изучалась многими авторами (см., например, [1, 5, 6, 9–12] и библиографию в [9]). Достаточное условие устойчивости системы (2) в зависимости от граничного значения τ дано в [9] с использованием линейного матричного неравенства и метода Ляпунова. Зависимость устойчивости от τ через обобщенные собственные значения A_1 и A_2 исследована в [12]. Независимости устойчивости системы от величины запаздывания посвящено немало работ. Например, в [12] доказано, что если матрицы A_1 и A_1+A_2 в системе (2) устойчивы и выполняется условие

$$\rho((i\omega I - A_1)^{-1}A_2) < 1,\ \forall\omega > 0, \tag{4}$$

то система (2) устойчива.

В [10] исследовано влияние параметра запаздывания на устойчивость линейных динамических систем с запаздыванием. Для этой цели авторы предложили частотный метод анализа.

В [11] приведены свойства спектра квазиполинома (2) и изучена связь между максимально допустимой кратностью собственных значений и спектральной абсциссой – наибольшей действительной частью спектра матрицы динамической системы.

Для многоагентной системы с информационными влияниями зависимость граничного значения запаздывания от спектра матрицы Лапласа представляет большой интерес и является нетривиальной задачей. Однако протоколу консенсуса с временной задержкой посвящено сравнительно немного работ. Тем не менее, как было отмечено выше, несколько разделов книги [14] посвящены отдельным аспектам проблем сетевого управления с запаздыванием.

В [23] впервые был рассмотрен следующий базовый протокол с временной задержкой для симметричного случая:

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t-\tau) - x_j(t-\tau)), \tag{5}$$

где $\mathcal{N}_i$ – множество агентов j, которые влияют на агента i с весом a_{ij}.

Условие консенсуса для такого протокола (с симметричным графом) сводится к скалярному случаю и неоднократно выводилось разными авторами. Например, из [1] этот результат можно получить как частный случай. Условие устойчивости (5) найдено также для произвольной устойчивой матрицы в [28].

Другой, не менее реалистичный протокол обсуждался в [29]:

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t-\tau)), \tag{6}$$

или в матричной форме

$$\dot{x}(t) = -\mu I x(t) + Ax(t-\tau), \tag{7}$$

где μ – сумма элементов строк матрицы A, которая считается одинаковой для всех строк матрицы A.

Известно, что устойчивость (5) зависит от L, т.е. система (5) устойчива, если τ не превышает некоторого граничного значения, зависящего от спектра L. Кроме того, если в системе (5) консенсус достигается, то его значение не зависит от τ. Однако система (6) устойчива при любом τ, но если также достигается консенсус, то его значение может зависеть от τ (см. теорему 2 в [29]).

Далее рассмотрим протокол (1). Отметим, что эта система исследуется с помощью скалярного уравнения

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) - \beta y(t-\tau), \tag{8}$$

где $\alpha = a\lambda$, $\beta = b\lambda$, λ – собственное значение матрицы L. Уравнение (8) для действительных чисел α и β изучалось многими авторами. Например, еще в 1950 г. в [30] были изучены корни трансцендентной функции, являющейся характеристической функцией скалярного разностно-дифференциального уравнения. (Также см. [1] и пример 2.4 в [12]).

Более общий случай

$$\dot{y}(t) - c\dot{y}(t-\tau) = -ay(t) - by(t-\tau) \tag{9}$$

был изучен в [9], где рассматривалась задача устойчивости в зависимости от действительных чисел a, b и c.

Здесь изучаем систему (1) с помощью скалярного уравнения (8), где α и β – комплексные числа.

Заметим, что если $a = 0$, то протокол (1) становится базовым протоколом консенсуса с временной задержкой (матричная форма (5)):

$$\dot{x}(t) = -Lx(t-\tau). \tag{10}$$

Для решения исследуемых проблем понадобятся следующие известные результаты, тесно связанные с теорией многоагентных систем.

Утверждение 1. [31] *Для любой лапласовской матрицы* L *ее индекс* (*см. определение выше*) *равен единице, т.е.* $\operatorname{ind} L = 1$, *и*

$$LL^{\vdash} = L^{\vdash}L = 0_{n\times n}. \tag{11}$$

Следующая теорема доказана в [31, теорема 5].

Теорема 1. $L^{\vdash} = \lim_{t\to\infty}(I + tL)^{-1}$.

Утверждение 2. [32] *Если* $x(t)$ *– решение системы* (12)

$$\dot{x}(t) = -Lx(t), \tag{12}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = L^{\vdash}x(0). \tag{13}$$

Утверждение 3. Пусть система (10) *устойчива, а* $x(t)$ *является решением* (10). *Тогда для решения* (10) *также имеет место* (13). *Если* 0 *– простое собственное значение матрицы* L, *то протокол* (10) *сходится к консенсусу.*

Утверждение 3 легко доказывается с помощью теоремы о конечном значении, утверждения 2 и теоремы 1.

3. Основные результаты

Рассмотрим следующие задачи для системы (1): 1) при каких значениях a и b система (1) устойчива независимо от τ; 2) если устойчивость системы зависит от τ, то найти граничное значение τ; 3) если достигается консенсус для любого вектора начальных значений, то чему равно значение консенсуса?

Характеристическая функция системы (1) является трансцендентной функцией и имеет вид

$$f(s) = \det(sI + aL + be^{-\tau s}L). \tag{14}$$

Если $\lambda_j \in \sigma(L)$ – собственное значение матрицы L, то $f(s)$ можно представить как

$$f(s) = \prod_{j=1}^{n} f_{\lambda_j}(s) = \prod_{j=1}^{n} (s + a\lambda_j + b\lambda_j e^{-\tau s}).$$

Пусть $f_{\lambda_j}(s)$ – характеристическая функция системы для скалярного случая:

$$f_{\lambda_j} = Q(s) + P(s)e^{-\tau s} = s + a\lambda_j + b\lambda_j e^{\tau s} = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

где $Q(s) = s + a\lambda_j, P(s) = b\lambda_j$.

Для исследования устойчивости квазимногочлена воспользуемся методом Цыпкина [7]), основанным на критерии Найквиста для случая с запаздыванием[2]. Для этой цели квазимногочлен $Q(s) + P(s)e^{-\tau s}s$ примем за характеристическую функцию системы с запаздывающей обратной связью и его устойчивость оценим по амплитудно-фазовой характеристике соответствующей разомкнутой системы с запаздыванием.

Амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы с запаздыванием представим как (более подробно см. [7])

$$W_\tau(i\omega) = -\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega\tau)}e^{-i\tau\omega} = -\frac{b\lambda_j}{i\omega + a\lambda_j}e^{-i\tau\omega} = -\frac{\beta}{i\omega + \alpha}e^{-i\tau\omega}, \tag{16}$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = a\lambda_j$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2 = b\lambda_j$. Для простоты у α и β опустим нижний индекс, который указывает на j-е собственное значение матрицы L.

Далее в работе аргумент собственного значения λ_j обозначим через ϕ_j, т.е. положим $\phi_j = \arg(\lambda_j)$. Пусть

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= -\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega\tau)} = -\frac{\beta_1 + i\beta_2}{\alpha_1 + i(\omega + \alpha_2)} = -\frac{(\beta_1 + i\beta_2)(\alpha_1 - i(\omega + \alpha_2))}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = \\ &= -\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} - i\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = \\ &= x(\omega) + iy(\omega) = W^0(\omega)e^{i\theta(\omega)}, \end{aligned} \tag{17}$$

[2] Этот метод тесно связан с принципом аргумента.

и

$$W_\tau(i\omega) = W(i\omega)e^{-i\tau\omega} = W^0(\omega)e^{i\theta(\omega)}e^{-i\tau\omega}. \tag{18}$$

Если $W(i\omega) = x(\omega) + iy(\omega)$, то после некоторых преобразований можно показать, что

$$\left(x(\omega) + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y(\omega) + \frac{b\mathrm{Im}(\lambda_j)}{2a\mathrm{Re}(\lambda_j)}\right)^2 = R^2, \tag{19}$$

где $R = \frac{b|\lambda_j|}{2a\mathrm{Re}(\lambda_j)}$, т.е. функция $W(s)$ мнимую ось конформно отображает в окружность.

Следующее утверждение следует из (17) и тождества (19).

Утверждение 4. Амплитудно-фазовая характеристика $W(i\omega)$ является окружностью на комплексной плоскости с центром в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b\mathrm{Im}(\lambda_j)}{2a\mathrm{Re}(\lambda_j)}\right)$ и радиусом $R = \frac{b|\lambda_j|}{2a\mathrm{Re}(\lambda_j)}$.

Заметим, что

$$y = \frac{\beta_1\omega}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}. \tag{20}$$

Согласно [7] выражение (17) назовем амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой *эквивалентной* системы без запаздывания. Устойчивость разомкнутой эквивалентной системы следует из выражения $Q = s + a\lambda$, где $a > 0$, а действительные части λ положительны. Амплитудно-фазовую характеристику замкнутой системы с запаздыванием представим как

$$\frac{W_\tau(i\omega)}{1 - W_\tau(i\omega)}.$$

В силу критерия Найквиста эквивалентная система устойчива, если точка $(1, i0)$ лежит вне характеристики, и неустойчива, если точка $(1, i0)$ лежит внутри нее.

В следующем утверждении приведено достаточное условие устойчивости системы (1).

Утверждение 5. Система (1) *устойчива при любом значении $\tau \geqslant 0$, если*

$$\frac{a}{b} > \max_{\lambda_j \in \sigma(L)\setminus\{0\}} \frac{1}{\cos\phi_j}. \tag{21}$$

Замечание 1. Доказательство утверждения 5 также можно получить из знаменитого метода Поляка об устойчивости и робастной устойчивости однотипной системы, состоящей из одинаковых звеньев и усилителей, опубликованного в [33]. Согласно [33], если $W(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ собственная (степень $A(s)$

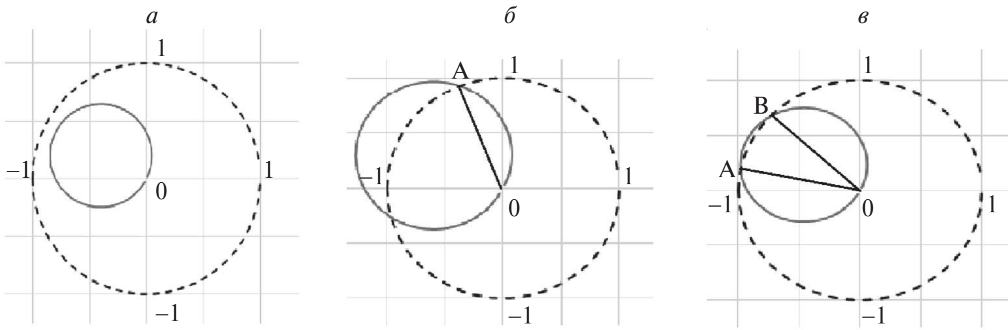

Рис. 1

не больше степени $B(s)$) и не имеет правых полюсов, то для устойчивости $D(W(s))$ все корни $D(p)$ должны лежать вне круга радиуса $\|W(s)\|_\infty$:

$$\|p_i\| > \|W(s)\|_\infty. \tag{22}$$

В рассматриваемом здесь случае $W(s) = -\frac{P(s)}{Q(s)}$ собственная, не имеет правых полюсов, а $D(p) = 1-p$. Согласно утверждению 5, для всех s имеет место $\|W(s)\| < 1$, т.е. выполняется условие (22).

Замечание 2. Еще одно доказательство утверждения 5 можно получить как следствие из теоремы 2.1 в [12] (см. пример 2.6 там же), применив ее для системы (1).

В [34] обобщенный частотный метод, похожий на частотный метод анализа однотипных систем [33], применен для анализа многоагентных систем со взаимодействующими агентами. Также в [34] в примере 2 было рассмотрено инерционное звено с запаздыванием. Однако для его устойчивости применен обобщенный частотный метод для дробно-рациональной функции, не являющейся трансцендентной.

Отметим, что при выполнении неравенства (21) окружность АФХ разомкнутой системы строго принадлежит единичному кругу с центром в $(0,0)$ (рис. 1,a).

Теорема 2. Пусть условие (21) *не выполнено и*

$$\lambda_j \in \Lambda = \left\{\lambda \in \sigma(L)\setminus\{0\} \mid a \leqslant \frac{1}{\cos\phi_j} b\right\}.$$

Тогда действительные части корней квазимногочлена (15) *отрицательны, если*

$$\tau < \tau_0^j = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta_1\alpha_1+\beta_2\sqrt{|\beta|^2-\alpha_1^2}}{|\beta|^2}\right)}{\sqrt{|\beta|^2-\alpha_1^2}-\alpha_2}, \tag{23}$$

и система (1) *устойчива при любом* $\tau < \tau_0$, *где* $\tau_0 = \min_{\lambda_j\in\Lambda}\tau_0^j$.

Согласно [7], если $W(i0) < -1$ (рис. 1,*б*), то имеется одна критическая частота. В этом случае $\frac{a}{b} < 1$, критическое значение запаздывания определяется единственным образом и является граничным: если $\tau < \tau_0^j$, то квазимногочлен (15) устойчив, а при $\tau > \tau_0^j$ – неустойчив.

При выполнении условий теоремы 2, если $|W(i0)| < 1$, то АФХ два раза пересекает единичную окружность и имеются две критические частоты ω_1 и ω_2, где $\omega_1 < \omega_2$, соответствующие точкам A и B из рис. 1,*в*. По этим критическим частотам определяются два критических значения запаздывания τ_1 и τ_2 соответственно. В этом случае при $\tau < \tau_2$ система устойчива, и τ_2 является граничным значением устойчивости системы. Если $\tau_1 > \tau > \tau_2$, то система неустойчива. Если $\tau > \tau_2$, то дальнейшее увеличение τ приводит к чередованию неустойчивости и устойчивости системы. Если точки A и B достаточно близки, т.е. разница значений τ_1 и τ_2 достаточно мала, то возможно сколь угодное число интервалов устойчивости и неустойчивости.

Следствие 1. *Если L – симметричная лапласовская матрица, $b = 1$ и $a = 0$, то из (23) для каждого собственного значения получим:*

$$\tau_0^j = \frac{\arccos 0}{\lambda_j} = \frac{\pi}{2\lambda_j}.$$

Заметим, что $\tau_0 = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}}$. Этот результат совпадает с результатом, приведенным в [23]. Однако для скалярного случая данная оценка была приведена в [7] в качестве примера и неоднократно была получена в различной литературе.

Пусть в (23) $b = 1$ и $a = 0$. Тогда для собственного значения λ_j в силу отрицательности $\beta_2 = b\,\mathrm{Im}\,(\lambda_j) = \mathrm{Im}\,(\lambda_j)$ выполняется

$$\tau_0^j = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta_2}{|\beta|}\right)}{|\lambda_j|} = \frac{\arccos(\sin|\phi_j|)}{|\lambda_j|} = \frac{\pi/2 - |\phi_j|}{|\lambda_j|}.$$

Следствие 2. *Если L – произвольная лапласовская матрица, $b = 1$ и $a = 0$, то*

$$\tau_0 = \min_{\lambda_j \neq 0} \frac{1}{|\lambda_j|}\left(\frac{\pi}{2} - |\phi_j|\right).$$

Это выражение совпадает с результатом об устойчивости произвольной матрицы, полученным в [28].

Следствие 3. *Если $L = 1$, т.е. рассматривается скалярный случай уравнения (1), то из (23) получим:*

$$\tau_0 = \frac{\arccos(-\frac{ab}{b^2})}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\arccos(-\frac{a}{b})}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Полученное выражение совпадает с граничным значением τ для скалярного уравнения (2.22) из [1] (см. пример 2.4 из [1]).

Теорема 3. Пусть система (1) *устойчива. Тогда если* $x(t)$ *– решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -aLx(t) - bLx(t-\tau), & t \geqslant 0; \\ x(t) = 0, & t \in [-\tau, 0), \end{cases}$$

то

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = L^{\vdash} x(0),$$

т.е. вектор, к которому сходится протокол (1)*, не зависит от коэффициентов* a *и* b*, а также от* τ*.*

Следствие 4. Если условие теоремы 3 выполнено и 0 *– простое собственное значение матрицы* L*, то протокол* (1) *сходится к консенсусу, значение которого равно значению консенсуса базового протокола* $\dot{x}(t) = -Lx(t)$*.*

4. Заключение

В данной статье исследован протокол консенсуса с запаздыванием. Получено условие, при котором сходимость протокола консенсуса не зависит от запаздывания. В случае нарушения этого условия найдено выражение для граничного значения запаздывания. Также исследовано асимптотическое поведение данного протокола. Доказано, что если в многоагентной системе с запаздыванием для любого вектора начальных значений консенсус достигается, то он определяется произведением собственного проектора на вектор начальных значений. Полученное в работе выражение для граничного значения τ обобщает некоторые ранее полученные формулы. Дальнейшим объектом исследования авторов является модель консенсуса в виде (2), согласно которой агенты сперва получают данные от своих непосредственных соседей без задержки, а потом с некоторой задержкой τ – от остальных агентов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 5. Если выполняется условие (21), то для любого $\lambda_j \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ справедливо

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{\cos \phi_j}.$$

Из последнего неравенства следует:

$$\frac{a^2}{b^2} > \frac{\mathrm{Re}^2(\lambda_j) + \mathrm{Im}^2(\lambda_j)}{\mathrm{Re}^2(\lambda_j)} \Longrightarrow \alpha_1^2 > |\beta|^2.$$

Тогда

$$|W(i\omega)| = \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} < \sqrt{\frac{|\beta|^2}{|\beta|^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} \leqslant 1.$$

Таким образом, если $\frac{a}{b} > \max_{\lambda_j \in \sigma(L)\setminus\{0\}} \frac{1}{\cos\phi_j}$, то $|W_0(i\omega)| < 1$, и протокол (1) устойчив при любом τ.

Доказательство теоремы 2. Задачу консенсуса системы с протоколом (1) будем исследовать с помощью квазимногочлена (15) с параметрами λ_j или $\bar{\lambda}_j$. Протокол (1) устойчив, если для каждого $\lambda_j \in \Lambda$ соответствующий квазимногочлен (15) устойчив.

Итак, для фиксированного λ_j исследуем устойчивость квазимногочлена (15).

Увеличение запаздывания τ может привести к тому, что точка $(1,0)$ будет лежать внутри амплитудно-фазовой характеристики $W_\tau(i\omega)$. Значение τ, при котором нули функции (15) переходят мнимую ось или при котором точка $(1,0)$ принадлежит $W_\tau(i\omega)$, называют критическим. Такие времена и частоты определяются условием

$$W_\tau(s) = 1, \tag{П.1}$$

или же

$$W^0(\omega)e^{i\theta(\omega)}e^{-i\tau\omega} = 1. \tag{П.2}$$

Для выполнения (П.2) должно быть:

$$1)\, W^0(\omega) = \frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + (\omega+\alpha_2)^2}} = 1; \quad 2)\, \theta(\omega) - \tau\omega = -2\pi n,$$

где n – целое положительное число.

Условие $|W^0(\omega)| = 1$ выполняется, когда $(\omega+\alpha_2)^2 = |\beta|^2 - \alpha_1^2$, т.е.

$$\omega = \pm\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2. \tag{П.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2(\omega+\alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega+\alpha_2)^2} = -\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2-\alpha_1^2}}{|\beta|^2}; \\ y &= -\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1(\omega+\alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega+\alpha_2)^2} = -\frac{\alpha_1\beta_2 \pm \beta_1\sqrt{|\beta|^2-\alpha_1^2}}{|\beta|^2}. \end{aligned} \tag{П.4}$$

Из второго условия, т.е. $\theta(\omega) - \tau\omega = -2\pi n$, следует:

$$\begin{aligned} \cos\theta(\omega) &= \cos(\tau\omega - 2\pi n); \\ \cos\theta(\omega) &= \cos\tau\omega. \end{aligned} \tag{П.5}$$

Рассмотрим подробнее $\theta(\omega)$. В силу $x^2 + y^2 = 1$ (поскольку (x, y) – точка пересечения с единичной окружностью) $\cos\theta(\omega) = x$, и из (П.3), (П.4) и (П.5) получим:

$$\tau_0^j = \frac{\arccos x}{\omega} = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2-\alpha_1^2}}{|\beta|^2}\right)}{\pm\sqrt{|\beta|^2-\alpha_1^2} - \alpha_2}. \tag{П.6}$$

Если λ_j – комплексное собственное значение лапласовской матрицы L, то устойчивость (15) исследуем для λ_j и $\bar{\lambda}_j$. Знаменатель правой части (П.6) достигает максимального значения при отрицательной мнимой части рассматриваемой пары собственных значений и положительном знаке перед корнем, т.е. при $\omega = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} + |\alpha_2|$. Аналогично, числитель – убывающая неотрицательная функция: чем больше значение $\left(-\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2-\alpha_1^2}}{|\beta|^2}\right)$, тем меньше значение функции $\arccos(x)$. Поэтому минимальное значение τ_0^j достигается при собственном значении с отрицательной мнимой частью, и граничное значение определяется выражением (23). Тогда граничное значение задержки для (1) определяется как $\tau_0 = \min_{\lambda_j \in \Lambda} \tau_0^j$.

Доказательство теоремы 3. Пусть условие для граничного значения τ выполнено. Тогда $x(t)$ будет иметь предел, и в силу теоремы о конечном значении получим:

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} s(sI + aL + be^{-s\tau}L)^{-1}x(0) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(I + \frac{1}{s}(a + e^{-s\tau})L\right)^{-1} x(0) = \lim_{t\to\infty}\left(I + t(a + be^{-\tau/t})L\right)^{-1} x(0). \tag{П.7}$$

Согласно теореме 1 имеем

$$\lim_{t\to\infty}\left(I + t(a + be^{-\tau/t})L\right)^{-1} = \lim_{t\to\infty}(I + tL)^{-1} = L^{\vdash}.$$

Тогда из (П.7) получим

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(I + t(a + be^{-\tau/t})L\right)^{-1} x(0) = L^{\vdash}x(0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. *Chebotarev N.G., Meiman N.N.* The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions // Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova. 1949. V. 26. P. 3–331.
3. *Pontryagin L.S.* On the zeros of some elementary transcendental functions [Russian] // Izv. Akad. Nauk SSR, Ser. Mat. 1942. V. 6. No. 3. P. 115–134.
4. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1966.
5. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
6. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

7. *Цыпкин Я.З.* Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // АиТ. 1946. Т. 7. №. 2–3. С. 107–129.

8. *Tsypkin Y.Z., Minyue FU.* Robust stability of time-delay systems with an uncertain time-delay constant // Int. J. Control. 1993. V. 57. No. 4. P. 865–879.

9. *Niculescu S.I.* Delay effects on stability: a robust control approach. London: Springer Science & Business Media, 2001.

10. *Niculescu S.I., Li X.G., Cela A.* Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part I // Controlling Delayed Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. 2022. V. 604. P. 117–155.

11. *Niculescu S.I., Boussaada I.* Counting Characteristic Roots of Linear Delay Differential Equations. Part II // Controlling Delayed Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. 2022. V. 604. P. 157–193.

12. *Gu K., Chen J., Kharitonov V.L.* Stability of time-delay systems. Berlin: Birkhäuser, 2003.

13. *Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Stability of functional differential equations. London: Academ. Press, 1986.

14. *Амелина Н.О., Ананьевский М.С., Проскурников А.В. и др.* Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2015.

15. *Yu W., Ren W., Chen G., et al.* Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data // Automatica. 2011. V. 47. No. 7. P. 1496–1503.

16. *Munz U., Papachristodoulou A., Allgower F.* Delay robustness in consensus problems // Automatica. 2010. V. 46. No. 8. P. 1252–1265.

17. *Hou W., Fu M., Zhang H., Wu Z.* Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay // Automatica. 2017. V. 75. P. 293–298.

18. *Hara S., Hayakawa T., Sugatat H.* Stability analysis of linear systems with generalized frequency variables and its applications to formation control // 46-th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, USA, 2007. P. 1459–1466.

19. *Yang W., Bertozzi A.L., Wang X.* Stability of a second order consensus algorithm with time delay // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008. P. 2926–2931.

20. *Yang W., Wang X., Shi H.* Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay // Syst. Control Lett. 2013. V. 62. No. 3. P. 269–276.

21. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // Proc. IEEE. 2007. V. 95. No. 1. P. 215–233.

22. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 6. P. 988–1001.

23. *Olfati-Saber R.M., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // IEEE Trans. Aautom. Control. 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.

24. *Ren W., Beard R.W., Atkins E.M.* Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control // IEEE Control Syst. Magazine. 2007. V. 27. No. 2. P. 71–82.

25. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph theoretic methods in multiagent networks // Princeton: Princeton University Press, 2010.

26. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // АиТ. 2009. № 3. С. 136–151.

Chebotarev P.Y., Agaev R.P. Coordination in multiagent systems and Laplacian spectra of digraphs // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 469–483.

27. *Rothblum G.* Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, II. Springer, Berlin, Heidelberg. 1976. Vol. 6. P. 188–201.

28. *Hara T., Sugie J.* Stability region for systems of differential-difference equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1996. V. 39. No. 1. P. 69–86.

29. *Seuret A., Dimarogonas D.V., Johansson K.H.* Consensus under communication delays // 47th IEEE Conference on Decision and Control. 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico, 2008. P. 4922–4927.

30. *Hayes N.D.* Roots of the transcendental equations associated with a certain differential-difference equation // J. London Math Soc. 1950. V. 1. No. 3. P. 226–232.

31. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Остовные леса орграфа и их применение // АиТ. 2001. № 3. С. 108–133.

Agaev R.P., Chebotarev P.Y. Spanning forests of a digraph and their applications // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 3. P. 443–466.

32. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Trans. Automat. Control. 2014. V. 59. No. 9. P. 2475–2479.

33. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем //АиТ. 1996. №. 11. С. 91–104.

Polyak B.T., Tsypkin Ya.Z. Stability and Robust Stability of Uniform Systems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.

34. *Hara S., Tanaka H., Iwasaki T.* Stability analysis of systems with generalized frequency variables // IEEE Trans. Autom. Control. 2013. V. 59. No. 2. P. 313–326.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 31.08.2023

После доработки 28.03.2024

Принята к публикации 30.04.2024